MAT101 ANALİZ I YAZ OKULU QUIZ SINAVI

1) $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=2$ denk. çözünüz.

2) $(a_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)(-1)^n + \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ dizisinin sınırlı olduğunu söyleyip, bu dizi için $\underline{\lim}(a_n)$ ve $\overline{\lim}(a_n)$ limitlerini bulunuz.

3) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-1}{3x^2+1} = -\dfrac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

4) $f(x) = [\![x+\frac{3}{5}]\!] + \dfrac{|x-2|}{\mathrm{Sgn}(x^2-4)}$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to -\frac{8}{5}} f(x)$ limitlerini bulunuz.

Süre 60 dakikadır.

1) $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=2 \Rightarrow x+1>0,\ x-1>0$

Then $\log_5(x^2-1)=2 \rightarrow x^2-1=25$

$\Rightarrow x^2=26 \quad x=\sqrt{26},\ x=-\sqrt{26}$?

Ç.K. $=\{\sqrt{26}\}$

2) $(a_n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)(-1)^n+\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ için

$1\leq 1+\frac{1}{n}\leq 2$, $(-1)^n\in[-1,1]$ ve $\sin\frac{n\pi}{6}\in[-1,1]$

olup $-3\leq a_n\leq 3$ olur. (a_n)'nin alt dizilerinden

$\frac{2\pi}{n\pi/6}=12/n$ için $(a_{12n}),(a_{12n+1}),\ldots,(a_{12n+11})$

olanları düşünelim.

$(a_{12n})=\left(1+\frac{1}{12n}\right)\cdot(-1)^{12n}+\sin(2n\pi)\longrightarrow 1$

$(a_{12n+1})=\left(1+\frac{1}{12n+1}\right)\cdot(-1)^{12n+1}+\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{6}\right)\longrightarrow -1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

$(a_{12n+2})=\left(1+\frac{1}{12n+2}\right)\cdot(-1)^{12n+2}+\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}\right)\rightarrow 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(a_{12n+3})=\left(1+\frac{1}{12n+3}\right)(-1)^{12n+3}+\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow 0$

$(a_{12n+4})=\left(1+\frac{1}{12n+4}\right)\cdot(-1)^{12n+4}+\sin\left(2n\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\rightarrow 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(a_{12n+5})\rightarrow -1+\frac{1}{2}$, $(a_{12n+6})\rightarrow 1+(-1)=0$,

$(a_{12n+7})\rightarrow -1-\frac{1}{2}$ $(a_{12n+8})\rightarrow 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(a_{12n+9})\rightarrow -1-1=-2$

$(a_{12n+10})\rightarrow 1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $a_{12n+11}\rightarrow -1-\frac{1}{2}$ olup

Limit noktaları kümesi

$Z = \left\{ 1, 1+\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, -2 \right\}$ olur.

O zaman

$\overline{\lim} a_n = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\underline{\lim} a_n = -2$ dir.

$\overline{\lim} a_n \neq \underline{\lim} a_n$ old.dan (a_n) yakınsak değildir.

3) $\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |x+1| < \delta$ old.da $\left| \frac{x-1}{3x^2+1} + \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$

o.ş. $\exists \delta : \delta(\varepsilon) > 0$?

$$\left| \frac{x-1}{3x^2+1} + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{3x^2+2x-1}{(3x^2+1) \cdot 2} \right| = \frac{|(x+1)(3x-1)|}{2|3x^2+1|}$$

$$< \frac{\delta \cdot |3x-1|}{2|3x^2+1|} \quad \ldots\ldots (*)$$

$0 < \delta \leq 1$ olsun. Buradan $|x+1| < 1 \Rightarrow$

$-1 < x+1 < 1 \Rightarrow -2 < x < 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 4 \Rightarrow$

$1 < 3x^2+1 < 13$ olur. Yine $-2 < x < 0 \Rightarrow$

$-6 < 3x < 0 \Rightarrow -7 < 3x-1 < -1 \Rightarrow$

$|3x-1| < 7$ olur. $(*)$ ifadesinden

$$\left| \frac{x-1}{3x^2+1} + \frac{1}{2} \right| < \frac{\delta \cdot |3x-1|}{2|3x^2+1|} < \frac{7\delta}{2} \Rightarrow$$

$\delta = \min\left\{ 1, \frac{2\varepsilon}{7} \right\}$ alınmalıdır.

4) $x=2$ mut. değ ve işaret fonk. için

$x=-8/5$ tam değer fonk. için kritik noktalar

old. dan sağ ve sol limit bakalım

$$\lim_{x\to 2^+} [\![x+\tfrac{3}{5}]\!] + \frac{x-2}{1} = 2$$

$$\lim_{x\to 2^-} [\![x+\tfrac{3}{5}]\!] + \frac{2-x}{-1} = 2$$

olup limit vardır.

$x=-8/5$ 'in bir δ komşuluğunda $|x-2|=2-x$

ve $\mathrm{Sgn}(x^2-4)<0$ olup

$$\lim_{x\to -8/5^+} [\![x+3/5]\!] + \frac{2-x}{-1} = -1 + \frac{-8}{5} - 2 = \frac{-23}{5}.$$

$$\lim_{x\to -8/5^-} [\![x+3/5]\!] + \frac{2-x}{-1} = -2 + \frac{-8}{5} - 2 = \frac{-28}{5}$$

$\boxed{x<-8/5 \quad x+3/5<-1 \Rightarrow}$

old. dan $\lim\limits_{x\to -8/5} f(x)$ limiti yoktur.